

اثبات

نویسنده:

تونلی کریمی

ترجمه:

غلامرضا یاسی پور

کلید واژه

مثال نقض؛ استقرای ریاضی؛ روش مستقیم؛

روش غیرمستقیم

اثبات نشده، این خطر را امکان پذیر می کند که نظریه ها بر ریاضیاتی واقع بر باد هوا بنا شوند.

این طور نیست که هر اثباتی تا ابد ثابت بماند، زیرا ممکن است در سایه گسترش های مفاهیمی که مرتبط با آن است، به جرح و تعدیل نیاز داشته باشد.

اثبات چیست؟

آیا زمانی که در مورد دستاوردی ریاضی چیزی می خوانید یا می شنوید، آن را باور می کنید؟ چه چیز وادارتان می کند که باور کنید؟ پاسخ می تواند چنین باشد: استدلالی منطقاً درست است، که از ایده هایی که پذیرفته ایم به گزاره ای که در موردش در تردیدیم، پیش برود. این پدیده را ریاضی دانان در صورت معمولی اش که آمیخته ای از زبان روزمره و منطق دقیق است، اثبات می نامند. به این ترتیب، بسته به کیفیت اثبات، قانع می شویم یا منکر می مانیم.

انواع اصلی اثبات به کار رفته در ریاضیات عبارتند از: روش مثال نقض^۲؛ روش مستقیم^۳؛ روش غیرمستقیم^۴؛ روش استقرای ریاضی^۵.

اشاره

ریاضی دانان می کوشند ادعایشان را با اثبات توجیه کنند. تحقیق در مورد قالب گیری استدلال های منطقی پولادین، نیروی پیش برنده «ریاضیات مجرد» است. سلسله استنتاجات صحیح از آنچه مشخص شده است یا فرض کرده ایم، ریاضیدانان را به نتیجه ای دلالت می کند که بعداً وارد مخزن ریاضیات تثبیت شده می شود.

مثال نقض

اجازه دهید کارمان را با منکر بودن آغاز کنیم؛ این روش اثبات ناصحیح بودن یک گزاره است. در این مورد برای مثال، گزاره ای معین در نظر می گیریم. فرض می کنیم این ادعا را می شنویم که نتیجه ضرب هر عدد در خودش، عددی زوج است. آیا آن را می پذیرید؟ پیش از پاسخ دادن، باید چند مثال را آزمایش کنیم. اگر عددی داشته باشیم، مثلاً ۶، و آن را در خودش ضرب کنیم، $6 \times 6 = 36$ را به دست آوریم. درمی یابیم که ۳۶ در واقع عددی زوج است.

اما با یک گل بهار نمی شود. ادعای مذکور در مورد هر عدد بود، و بی نهایت عدد داریم. برای اینکه مطمئن بیشتری در مورد مسئله به دست آوریم، باید مثال های بیشتری را بررسی کنیم.

مقدمه

اثبات ها به آسانی به دست نمی آیند، بلکه غالباً در پایان مقدار معتناهی پژوهش و جست و جو در مسیرهای خطا ظاهر می شوند. کوشش در به دست آوردن آن ها زمینه اصلی حیات ریاضی دانان را اشغال می کند. هر اثبات موفقیت آمیز که نشان اعتبار ریاضی دان را همراه دارد، قضیه تثبیت شده ای را از حدس، ایده درخشان یا گمان اولیه، جدا می کند. کیفیت های لازم در هر اثبات عبارتند از دقت، وضوح، و به همین اندازه، ظرافت.

به این سه، بینش را نیز اضافه کنید. اثبات خوب «اثباتی است که خردمندترمان کند». همچنین بهتر است که اثباتی داشته باشیم، تا اصلاً نداشته باشیم. پیشرفت بر مبنای مطالب

با بررسی مثلاً^۹، درمی یابیم که: $۸۱ = ۹ \times ۹$. اما ۸۱ عددی فرد است. یعنی گزاره مذکور که تمام اعداد چون در خودشان ضرب شوند عددی زوج به دست می دهند، دروغ است. مثالی چنین به نقض ادعای اولیه می انجامد و به مثال نقض موسوم است. به عنوان نمونه، یک مثال نقض در مورد این ادعا که «تمام قوها سفیدند»، دیدن یک قوی سیاه است. بخشی از لذات ریاضیات، جست و جوی مثالی نقض برای کنار زدن قضایای ادعایی است. ممکن است در صورت شکست خوردن در یافتن یک مثال نقض، این احساس را داشته باشیم که گزاره مورد بحث درست است. در این صورت، ریاضی دان مجبور به انجام بازی دیگری است. یعنی باید اثباتی بسازد و در این مورد، سر راست ترین نوع اثبات، روش اثبات مستقیم است.

روش مستقیم

در روش مستقیم، با استدلال منطقی از آنچه قبلاً اثبات شده یا فرض شده به سوی نتیجه حرکت می کنیم. اگر بتوانیم این کار را انجام دهیم، یک «قضیه»^{۱۰} داریم. در مورد ادعای پیشین، نمی توانیم اثبات کنیم که ضرب هر عدد در خودش به عددی زوج می انجامد، زیرا قبلاً آن را رد کرده ایم. اما ممکن است بتوانیم مطلبی به دست آوریم. تفاوت بین اولین مثالمان، یعنی ۶، و مثال نقضمان، یعنی ۹، در این است که عدد اول زوج و مثال نقض، فرد است. در این مورد، تغییر «فرض»^{۱۱} کاری است که می توان انجام داد. بنابراین، گزاره جدیدمان چنین است: «اگر عدد زوجی را در خودش ضرب کنیم، نتیجه عددی زوج است.»

ابتدا، چند مثال عددی دیگر را بررسی می کنیم و درمی یابیم که این گزاره هر بار محقق می شود و نمی توان مثال نقضی به دست آورد. با تغییر مسیر، سعی در اثبات آن می کنیم، اما چگونه کارمان را شروع کنیم؟ می توانیم با عدد زوج عمومی n آغاز کنیم، ولی از آنجا که این کار کمی مجرد به نظر می رسد، ملاحظه می کنیم که اثبات با بررسی یک عدد واقعی، مثلاً ۶، چگونه پیش می رود. همان طور که می دانیم، عدد زوج عددی است که مضربی از ۲ است؛ یعنی $۶ = ۲ \times ۳$. از آنجا که $۶ \times ۶ = ۶ + ۶ + ۶ + ۶ + ۶ + ۶$ یا به صورت دیگر:

$$۶ \times ۶ = ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳$$

یا با باز نویسی آن، با استفاده از پرانتز:

$$۶ \times ۶ = ۲ \times (۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳)$$

که نشان می دهد ۶×۶ مضربی از ۲ است و چون چنین است، عددی زوج است. اما در این استدلال، مطلب خاصی در مورد ۶ وجود ندارد و می توانستیم کارمان را با $n = ۲ \times k$ شروع کنیم، $n \times n = ۲ \times (k + k + \dots + k)$ را به دست آوریم و نتیجه بگیریم

که $n \times n$ زوج است. اینک اثباتمان کامل است. در ترجمه «مقدمات اقلیدس»^{۱۲} ریاضی دانان متجدد در پایان اثبات، برای بیان این موضوع که کار پایان یافته، «QED» می نوشتند که مختصر عبارت لاتینی «quod erat demonstrandum» است (به معنی: باید به اثبات می رسید یا فهورالمطلوب). امروزه از یک مربع پر، یعنی ■ استفاده می کنند. این مربع، به نام پل هالموس^{۱۳}، معرف آن، به «هالموس» مرسوم است.

روش غیرمستقیم

در این روش وانمود می کنیم نتیجه دروغ است و با استفاده از استدلالی منطقی، مبرهن می کنیم که این فرض نقیض فرض مسئله است. اجازه دهید نتیجه پیشین را با این روش اثبات کنیم.

فرضمان این است که n زوج است و وانمود می کنیم $n \times n$ فرد است. می توانیم بنویسیم: $n \times n = n + n + \dots + n$. در این جمع n بار n داریم و به این معنی است که n نمی تواند زوج باشد (زیرا اگر چنین باشد $n \times n$ زوج می شود). بنابراین n فرد است که نقیض فرضمان است. ■

در واقع این روش، صورت معتدل روش غیرمستقیم است. روش غیرمستقیم نیرومند، به عنوان «برهان خلف»^{۱۴} (تحویل به مهمل) شناخته می شود که یونانیان علاقه بسیاری به آن داشتند. در آکادمی آتن، سقراط^{۱۵} و افلاطون^{۱۶} علاقه داشتند که موضوع مورد بحث را با پیچیدن خصم در شبکه ای از تناقضات، اثبات کنند که بیرون از آن، موضوعی بود که سعی در اثباتش داشتند. اثبات کلاسیک این موضوع که ریشه دوم ۲ عددی گنگ است، یکی از این موارد محسوب می شود که در آن کار را با این فرض آغاز می کنیم که ریشه دوم ۲ عددی گویاست و آن گاه به استخراج نقیض این فرض می پردازیم.

روش استقرای ریاضی

استقرای ریاضی روشی نیرومند در اثبات این موضوع است که دنباله ای از گزاره های $P_1, P_2, P_3, \dots$ جمیعاً راست اند. این روش، در دهه ۱۸۳۰، توسط آگوستون دومورگان^{۱۷} مطرح شد. او توانست آنچه را که صدها سال پیش شناخته بودند، فرمول بندی کند. این تکنیک خاص (که نباید با «استقرای علمی»^{۱۸} اشتباه شود) به گونه ای وسیع در اثبات گزاره های شامل «اعداد درست»^{۱۹} به کار می رود. روش مورد بحث، به خصوص، در «نظریه گراف ها»^{۲۰}، «نظریه اعداد»^{۲۱} و «علوم رایانه»^{۲۲} عموماً سودمند است.

به عنوان مسئله ای تمرینی به مسئله جمع اعداد فرد

انواع اصلی
اثبات به کار
رفته در
ریاضیات
عبارت اند از:
روش
مثال نقض؛
روش
مستقیم؛
روش
غیرمستقیم؛
روش
استقرای ریاضی

اثبات‌ها به انواع و اقسام سبک‌ها و اندازه‌ها ظاهر می‌شوند. بعضی کوتاه و مرتب و منظم‌اند؛ به‌خصوص آن‌ها که در کتاب‌های درسی یافت می‌شوند. پاره‌ای دیگر با به تفصیل آوردن آخرین تحقیقات، سر به هزاران صفحه می‌زنند؛ به‌طوری که اشخاص معدودی از کل استدلال این حالت سردر می‌آورند

می‌پردازیم. برای مثال، جمع سه عدد فرد اولیه، یعنی $1+3+5=9$ است، در حالی که مجموع چهار عدد فرد اولیه، یعنی: $1+3+5+7=16$ است. اما ۹ برابر است با: $3 \times 3 = 3^2$ و ۱۶ برابر است با: $4 \times 4 = 4^2$. بنابراین آیا می‌شود جمع n عدد فرد اولیه برابر n^2 باشد؟ در صورتی که مقدار به تصادف انتخاب شده‌ای از n ، مثلاً $n=7$ ، را بررسی کنیم، درمی‌یابیم که در واقع مجموع ۷ عدد فرد اولیه، یعنی:

$$1+3+5+7+9+11+13=49$$

برابر 7^2 است. ولی آیا این نمونه در مورد جمیع مقادیر n صادق است؟ چگونه می‌توان مطمئن بود؟ در این مورد با مشکل مواجه هستیم، زیرا نمی‌توان امیدوار بود که بتوانیم بی‌نهایت حالت را یکی یکی مورد بررسی قرار دهیم.

این مرحله‌ای است که استقرای ریاضی قدم به میدان می‌گذارد. به‌طور غیررسمی، این روش، «روش دومینویی»^{۱۹} اثبات است. این استعاره در مورد ردیفی از دومینوها به کار می‌رود که بر انتهایشان ایستاده‌اند. اگر یک دومینو بیفتد، پهلویی خود را می‌اندازد. این مطلب واضح است. پس تنها چیزی که برای انداختن همه‌شان نیاز داریم، افتادن اولی است. می‌توان این تفکر را در مورد مسئله اعداد فرد هم به کار برد. گزاره P_n بر این است که مجموع n عدد فرد اولیه به n^2 سر می‌زند. در این صورت، استقرای ریاضی زنجیره‌ای از واکنش‌ها برقرار می‌کند که با توجه به آن‌ها جمیع موارد $P_1, P_2, P_3, \dots$ صادق خواهند بود. گزاره P_1 بداهتاً راست است، زیرا: $1=1^2$. سپس P_2 راست است، زیرا: $1+3=2^2$. P_3 نیز راست است، زیرا: $1+3+5=3^2$. به این ترتیب، دستاورد هر مرحله را برای جهش به مرحله بعدی به کار می‌بریم. این فرایند را

مشکلات اثبات

می‌توان برای قالب‌بندی روش استقرای ریاضی فرمول‌بندی کرد.

اثبات‌ها به انواع و اقسام سبک‌ها و اندازه‌ها ظاهر می‌شوند. بعضی کوتاه و مرتب و منظم‌اند؛ به‌خصوص آن‌ها که در کتاب‌های درسی یافت می‌شوند. پاره‌ای دیگر با به تفصیل آوردن آخرین تحقیقات، سر به هزاران صفحه می‌زنند؛ به‌طوری که اشخاص معدودی از کل استدلال این حالت سردر می‌آورند.

در این مورد بحث‌هایی اساسی نیز مطرح هستند. به‌عنوان نمونه، تعداد اندکی از ریاضی‌دانان، از روش برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)، آنجا که به‌وجود می‌پردازد، ناخشنودند. آیا اگر این فرض که جواب یک معادله وجود ندارد، به نقیض بینجامد، در اثبات این موضوع کفایت می‌کند که جوابی وجود دارد؟ مخالفان این روش اثبات ادعا می‌کنند که منطق صرفاً یک ترفند است و نمی‌گوید که چگونه جوابی واقعی را به‌دست آوریم. این افراد را «ساختارگرا»^{۲۰} (با تفاوت‌های جزئی) می‌نامند؛ افرادی که عقیده دارند روش‌های اثبات از به‌دست دادن «مفهوم عددی»^{۲۱} عاجزند. آنان ریاضی‌دانان کلاسیکی را که روش برهان خلف را به‌عنوان سلاحي بنيانی در زرادخانه ریاضی در نظر می‌گیرند، تحقیر می‌کنند.

از طرف دیگر، ریاضی‌دانان سنتی‌تر خواهند گفت که غیرقانونی اعلام کردن این نوع استدلال، به معنی کار با یک دست در حالی است که دست دیگر بسته باشد. از این گذشته، انکار دستاوردهای بسیاری که با استفاده از روش غیرمستقیم اثبات شده‌اند، فرشیته ریاضیات را نخ‌نما به‌نظر می‌رساند!

تاریخچه

حدود ۳۰۰ قبل از میلاد: «مقدمات اقلیدس» مدل اثبات ریاضی «mathematical proof» را به‌دست می‌دهد.

۱۶۳۷ میلادی: دکارت در کتاب خود به‌نام «گفتار در روش»، دقت ریاضی را به‌عنوان یک مدل بنیان می‌گذارد.

۱۸۳۸ میلادی: دومورگان اصطلاح «استقرای ریاضی» را معرفی می‌کند.

۱۹۶۷ میلادی: پیشاب نتایجی را منحصر با روش‌های سازنده (constructive methods) اثبات می‌کند.

۱۹۷۶ میلادی: ایمره لاکاتوس کتاب مؤثر «اثبات‌ها و ابطال‌ها» را منتشر می‌کند.

پی‌نوشت‌ها

1. pure mathematics
2. method of the counterexample
3. direct method
4. indirect method
5. method of mathematical induction
6. theorem
7. hypothesis
8. Euclid's *Elements*
9. Paul Halmos
10. reductio ad absurdum
11. Socrates
12. Plato
13. Augustus De Morgan
14. scientific induction
15. whole numbers
16. graph theory
17. number theory
18. computer science
19. domino method
20. Constructivist
21. numerical meaning